

**Р-24.** Значение арифметического выражения:  $64^{10} + 2^{90} - 16$  записали в системе счисления с основанием 8. Сколько цифр «7» содержится в этой записи?

**Решение:**

- 1) Приведём все числа к степеням восьмерки, учитывая, что  $16 = 64 - 48 = 8^2 - 6 \cdot 8^1$   
 $64^{10} + 2^{90} - 16 = (8^2)^{10} + 2^{3 \cdot 30} - (8^2 - 48) = 8^{20} + 8^{30} - 8^2 + 6 \cdot 8^1$
- 2) Перепишем выражение, располагая степени восьмёрки в порядке убывания:  
 $8^{20} + 8^{30} - 8^2 + 6 \cdot 8^1 = 8^{30} + 8^{20} - 8^2 + 6 \cdot 8^1$
- 3) Очевидно, что «семёрки» в восьмеричной записи значения выражения возникнут только за счёт вычисления разности  $8^{20} - 8^2$ , их количество равно  $20 - 2 = 18$

Ответ: **18**.

**Р-23.** Значение арифметического выражения:  $9^9 - 3^9 + 9^{19} - 19$  записали в системе счисления с основанием 3. Сколько цифр «2» содержится в этой записи?

**Решение:**

- 1) Приведём все числа к степеням тройки, учитывая, что  $19 = 27 - 8 = 3^3 - (2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0)$ :  
 $9^9 - 3^9 + 9^{19} - 19 = (3^2)^9 - 3^9 + (3^2)^{19} - (3^3 - (2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0)) = 3^{18} - 3^9 + 3^{38} - 3^3 + 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0$
- 2) Перепишем выражение, располагая степени тройки в порядке убывания:  
 $3^{18} - 3^9 + 3^{38} - 3^3 + 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0 = 3^{38} + 3^{18} - 3^9 - 3^3 + 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0$
- 3) Сначала рассмотрим часть выражения, в которой имеется два расположенных подряд «минуса»:  $3^{18} - 3^9 - 3^3$ :
  - а. найдём разность двух крайних чисел:  $3^{18} - 3^3$ , в её троичной записи  $18 - 3 = 15$  «двоек» и 3 «нуля»;
  - б. вычтем из этого числа значение  $3^9$ : одна из «двоек» (на 10-й справа позиции) уменьшится на 1, остальные цифры не изменятся;
  - с. итак, троичная запись разности  $3^{18} - 3^9 - 3^3$  содержит  $15 - 1 = 14$  «двоек», одну «единицу» и 3 «нуля»
- 4) Прибавим к полученному значению сумму:  $2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0 = 22_3$ . В троичной записи результата два крайних справа нуля заменяются на «двойки», остаётся один ноль. Общее количество «двоек»:  $14 + 2 = 16$ .
- 5) Прибавление значения  $3^{38}$  не изменит количества «двоек» в троичном числе: слева от имеющихся цифр появятся ещё  $38 - 18 = 20$  «нулей» и одна «единица» – на 39-й справа позиции.
- 6) Итак, результат, записанный в троичной системе, содержит 39 цифр. Его состав: 16 «двоек», 2 «единицы» (их позиции: 39-я и 10-я справа) и 21 «нуль» ( $39 - 16 - 2 = 21$ ).

Ответ: **16**.

**Р-20.** Сколько единиц в двоичной записи числа

$$4^{2015} + 8^{405} - 2^{150} - 122$$

1 способ

**Решение** приведём все числа к степеням двойки, учитывая, что  $122 = 128 - 4 - 2 = 2^7 - 2^2 - 2^1$ :

$$\begin{aligned} 4^{2015} + 8^{405} - 2^{150} - 122 &= (2^2)^{2015} + (2^3)^{405} - 2^{150} - 2^7 + 2^2 + 2^1 = \\ &= 2^{4030} + 2^{1215} - 2^{150} - 2^7 + 2^2 + 2^1 \end{aligned}$$

- 1) вспомним, число  $2^N - 2^K$  при  $K < N$  записывается как  $N-K$  единиц и  $K$  нулей:

$$2^N - 2^K = \underbrace{1 \dots 1}_{N-K} \underbrace{0 \dots 0}_K$$

- 2) для того чтобы использовать это свойство, нам нужно представить заданное выражение в виде пар вида  $2^N - 2^K$ , причём в этой цепочке степени двойки нужно выстроить по убыванию

- 3) в нашем случае вы выражении

$$2^{4030} + 2^{1215} - 2^{150} - 2^7 + 2^2 + 2^1$$

стоит два знака «минус» подряд, это не позволяет сразу использовать формулу

- 4) используем теперь равенство  $-2^N = -2^{N+1} + 2^N$ , так что  $-2^{150} = -2^{151} + 2^{150}$ ; получаем

$$2^{4030} + 2^{1215} - 2^{151} + 2^{150} - 2^7 + 2^2 + 2^1$$

здесь две пары  $2^N - 2^K$ , а остальные слагаемые дают по одной единице

- 5) общее число единиц равно  $1 + (1215 - 151) + (150 - 7) + 1 + 1 = 1210$

- 6) ответ: **1210**.

2 способ

- 1) приведём все числа к степеням двойки, учитывая, что  $122 = 128 - 4 - 2 = 2^7 - 2^2 - 2^1$ :

$$\begin{aligned} 4^{2015} + 8^{405} - 2^{150} - 122 &= (2^2)^{2015} + (2^3)^{405} - 2^{150} - 2^7 + 2^2 + 2^1 = \\ &= 2^{4030} + 2^{1215} - 2^{150} - 2^7 + 2^2 + 2^1 \end{aligned}$$

- 2) ищем в **разности** крайнюю левую степень двойки и крайнюю правую  $2^{1215} - 2^7$ , при этом  $2^{150}$  на время «теряем»

- 3) определяем количество единиц в разности  $2^{1215} - 2^7$ , получаем  $1215 - 7 = 1208$  единиц

- 4) так как «внутри» этой разности есть еще  $2^{150}$ , то просто вычитаем одну единицу:  $1208 - 1 = 1207$ ; итого в разности  $2^{1215} - 2^{150} - 2^7$  ровно 1207 единиц

- 5) осталось прибавить по одной единицы от чисел  $2^{4030}$ ,  $2^2$ ,  $2^1$

- 6) Ответ: **1210**